

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ

2 mai 2015

Profil Tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Să se demonstreze că dacă ecuația de gradul al doilea: $ax^2 + bc + c = 0$ are rădăcini reale, atunci și ecuațiile: $(a + b + c) \cdot x^2 + (b + 2a) \cdot x + a = 0$, respectiv $c \cdot x^2 + (b - 2c) \cdot x + a - b + c = 0$ au rădăcini egale.
2. Terasa unei cofetării are forma unui dreptunghi $ABCD$ în care $CD = 8$ m , iar $\operatorname{tg}(\angle ABD) = 1,75$.
 - a) Determinați suprafața terasei.
 - b) Patronul terasei a cumpărat opt arbuști ornamentali pe care dorește să-i dispună pe conturul terasei la distanța de 5 m unul față de celălalt. Justificați dacă poate face acest lucru, prezentând un mod de dispunere a acestora .
3. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC precum și punctele $M \in [AB], N \in [BC]$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = 2$. Dacă P este un punct în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PC}$, atunci :
 - a) Demonstrați că punctele A, P și C sunt coliniare.
 - b) Aflați $\frac{AP}{AC}$.
 - c) Demonstrați că $\sin(\angle B) > \cos(\angle C)$.
4. În ultimele trei turnee de tenis Simona Halep a disputat , în total , un număr impar de meciuri. Știind că fiecare meci a avut două sau trei seturi, numărul meciurilor disputate care au avut două seturi este mai mare decât numărul meciurilor disputate care au avut trei seturi , iar tenismena a disputat, în cele trei turnee, un număr total de 25 de seturi , se cere :
 - a) Câte meciuri a câte trei seturi pe meci a disputat tenismena ?
 - b) Câte meciuri a disputat tenismena în cele trei turnee?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ

2 mai 2015

Profil Tehnic

CLASA A X-A



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

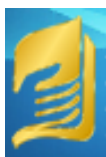
- Se consideră numărul $a = \log_4 27 + \log_9 16$.
 - Demonstrați că $\frac{9}{4} < \log_4 27 < \frac{5}{2}$.
 - Demonstrați că $\frac{5}{4} < \log_9 16 < \frac{3}{2}$.
 - Calculați partea întreagă a numărului a .

- Se consideră numărul complex $z \neq 1$, astfel încât $\frac{1+z}{1-z} = i\sqrt{3}$.
 - Demonstrați că $z = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.
 - Verificați că $z^6 = 1$ și $1+z+z^2+\dots+z^5 = 0$.
 - Calculați suma $S = 1+z+z^2+\dots+z^{2016}$.

- În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, a)$ și $B(a, -2)$, unde $a \in \mathbb{R}$.
 - Determinați a , astfel încât $AB = 4$.
 - Demonstrați că aria triunghiului AOB este $A_{AOB} = \frac{a^2+4}{2}$.
 - Demonstrați că aria triunghiului AOB este minimă dacă și numai dacă perimetrul triunghiului AOB este minim.

- Demonstrați că $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, $\forall x, y > 0$.
 - Un teren cu suprafața de 400 m^2 are forma unui romb și trebuie să-l împrejmuim cu un gard. Demonstrați că lungimea gardului este cel puțin 80 m .

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ

2 mai 2015

Profil Tehnic

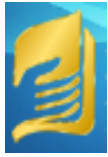


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

- Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Calculați A^2, A^4 și determinați cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea ca $A^n = I_2$.
 - Demonstrați că dacă matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ verifica ecuația $A \cdot X = X \cdot A$, atunci exista $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$.
 - Demonstrați că matricea X determinată la punctul anterior verifică egalitatea:
 $X^2 - (2a+b) \cdot X + (\det X) \cdot I_2 = O_2$
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = m \cdot e^{ax} + n \cdot e^{bx} + p \cdot e^{cx}$, $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $m, n, p \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că $|f(x)| \leq |\sin x|$, $\forall x \in (-1, 1)$.
 - Calculați $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{x}$; $k \in \mathbb{R}^*$.
 - Demonstrați că $m + n + p = 0$.
 - Demonstrați inegalitatea $|ma + nb + pc| \leq 1$.
- Se considera trei capitaluri proporționale cu numerele 3, 4, 6. Primul a fost plasat 60 de zile cu dobânda de 6%, al doilea 120 de zile cu dobânda de 9% iar al treilea 180 de zile cu dobânda de 12%. Dobânda simpla totală obținută este de 510 euro, iar anul bancar are 360 de zile.
 - Sa se scrie sistemul liniar care descrie modelul matematic al problemei.
 - Determinați cele trei capitaluri.
- Fie funcțiile $f: (\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$, $g: (\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f'(x)$.
 - Studiați monotonia funcțiilor f și g .
 - Folosind teorema lui Lagrange pentru funcția f pe intervalul $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

Profil Tehnic

CLASA A XII-A



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

- Se consideră polinomul $f = x^4 - 8x^3 + ax^2 + 8x + b$, $f \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Arătați că $f(1) = 0$ dacă și numai dacă $a + b + 1 = 0$.
 - Determinați valoarea numărului real a pentru care $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.
 - Determinați numerele reale a și b astfel încât rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ să fie în progresie aritmetică.

- Se consideră inelul aritmetic al claselor de resturi modulo 9, notat cu $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$.
 - Calculați suma în $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$: $s = \hat{1} \cdot \hat{2} + \hat{2} \cdot \hat{3} + \hat{3} \cdot \hat{4} + \hat{4} \cdot \hat{5} + \hat{5} \cdot \hat{6} + \hat{6} \cdot \hat{7} + \hat{7} \cdot \hat{8}$
 - Să se rezolve ecuația matriceală în inelul matricelor $M_2(\mathbb{Z}_9)$: $\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{5} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{1} \\ \hat{7} & \hat{8} \end{pmatrix}$
 - Arătați că matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_9)$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det A \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{8}\}$

- Se consideră numerele $I(a) = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + ax + 1} dx$ și $J(a) = \int_0^1 \frac{1}{e^x + ax + 1} dx$, unde $a \in [0, +\infty)$ este parametru.
 - Calculați $I(0)$.
 - Calculați $J(0)$.
 - Determinați numărul real pozitiv a pentru care este adevărată relația: $I(a) + a \cdot J(a) = 2$

- Rata cu care o familie utilizează, într-o zi, energia electrică (în kW / oră) este $K(t)$ dată de relația $K'(t) = 5t \cdot e^{-t}$, unde $t \in [0; 24]$ este timpul exprimat în ore.
 - Câți kW folosește familia în primele 4 ore ale zilei?
 - Câți kW consumă familia în 30 de zile?(În calcule se va lua $e \approx 3$. Rezultatele se vor exprima sub formă zecimală cu două zecimale exacte.)

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.