CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

Profil Tehnic

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Să se demonstreze că dacă ecuația de gradul al doilea: $ax^2 + bc + c = 0$ are rădăcini reale, atunci şi ecuațiile: $(a+b+c)\cdot x^2 + (b+2a)\cdot x + a = 0,$ respectiv $c\cdot x^2 + (b-2c)\cdot x + a - b + c = 0$ au rădăcini egale.

2. Terasa unei cofetării are forma unui dreptunghi $ABCD$ în care $CD = 8$ m, iar $tg(\measuredangle ABD) = 1,75$.

a) Determinați suprafața terasei.

b) Patronul terasei a cumpărat opt arbuşti ornamentali pe care doreşte să-i dispună pe conturul terasei la distanța de 5 m unul față de celălalt. Justificați daca poate face acest lucru, prezentând un mod de dispunere a acestora .

3. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC precum şi punctele $M \in [AB], N \in [BC]$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = 2$. Dacă P este un punct în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PC}$, atunci :

a) Demonstrați că punctele A, P şi C sunt coliniare.

b) Aflați $\dfrac{AP}{AC}$.

c) Demonstrați că $\sin(\measuredangle B) > \cos(\measuredangle C)$.

4. În ultimele trei turnee de tenis Simona Halep a disputat , în total , un număr impar de meciuri. Ştiind că fiecare meci a avut două sau trei seturi, numărul meciurilor disputate care au avut două seturi este mai mare decât numărul meciurilor disputate care au avut trei seturi , iar tenismena a disputat, în cele trei turnee, un număr total de 25 de seturi , se cere :

a) Câte meciuri a câte trei seturi pe meci a disputat tenismena ?

b) Câte meciuri a disputat tenismena în cele trei turnee?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015
Profil Tehnic

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. Se consideră numărul $a = \log_4 27 + \log_9 16$.

a) Demonstrați că $\frac{9}{4} < \log_4 27 < \frac{5}{2}$.

b) Demonstrați că $\frac{5}{4} < \log_9 16 < \frac{3}{2}$.

c) Calculați partea întreagă a numărului a.

2. Se consideră numărul complex $z \neq 1$, astfel încât $\frac{1+z}{1-z} = i\sqrt{3}$.

a) Demonstrați că $z = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

b) Verificați că $z^6 = 1$ şi $1 + z + z^2 + ... + z^5 = 0$.

c) Calculați suma $S = 1 + z + z^2 + ... + z^{2016}$.

3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, a)$ şi $B(a, -2)$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Determinați a, astfel încât $AB = 4$.

b) Demonstrați că aria triunghiului AOB este $\mathcal{A}_{AOB} = \frac{a^2+4}{2}$.

c) Demonstrați că aria triunghiului AOB este minimă dacă şi numai dacă perimetrul triunghiului AOB este minim.

4. a) Demonstrați că $x + y \geq 2\sqrt{xy}, \forall x, y > 0$.

b) Un teren cu suprafața de 400 m^2 are forma unui romb şi trebuie să-l împrejmuim cu un gard. Demonstrați că lungimea gardului este cel puțin 80 m.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

1. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculaţi A^2, A^4 şi determinaţi cel mai mic număr natural $n\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea ca $A^n=I_2$.

b) Demonstraţi că dacă matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ verifica ecuaţia $A\cdot X=X\cdot A$, atunci exista $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a+b\end{pmatrix}$.

c) Demonstraţi că matricea X determinată la punctul anterior verifică egalitatea:
$X^2-(2a+b)\cdot X+(\det X)\cdot I_2=O_2$

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=m\cdot e^{ax}+n\cdot e^{bx}+p\cdot e^{cx}$, $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, $m,n,p\in\mathbb{R}$, cu proprietatea că $|f(x)|\le|\sin x|$, $\forall x\in(-1,1)$.

a) Calculaţi $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{kx}-1}{x}; k\in\mathbb{R}^*$.

b) Demonstraţi că $m+n+p=0$.

c) Demonstraţi inegalitatea $|ma+nb+pc|\le 1$.

3. Se considera trei capitaluri proporţionale cu numerele 3, 4, 6. Primul a fost plasat 60 de zile cu dobânda de 6%, al doilea 120 de zile cu dobânda de 9% iar al treilea 180 de zile cu dobânda de 12%. Dobânda simpla totala obţinuta este de 510 euro, iar anul bancar are 360 de zile.
a) Sa se scrie sistemul liniar care descrie modelul matematic al problemei.
b) Determinaţi cele trei capitaluri.

4. Fie funcţiile $f:(\frac{1}{2},\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$, $g:(\frac{1}{2},\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)$.

a) Studiaţi monotonia funcţiilor f si g.

b) Folosind teorema lui Lagrange pentru funcţia f pe intervalul $[n, n+1]$, $n\in\mathbb{N}^*$, demonstraţi că $g(n+1)<f(n+1)-f(n)<g(n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

CLASA A XII-A

1. Se consideră polinomul $f = x^4 - 8x^3 + ax^2 + 8x + b$, $f \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Arătaţi că $f(1) = 0$ dacă şi numai dacă $a + b + 1 = 0$.

b) Determinaţi valoarea numărului real a pentru care $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

c) Determinaţi numerele reale a şi b astfel încât rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ să fie în progresie aritmetică.

2. Se consideră inelul aritmetic al claselor de resturi modulo 9 , notat cu $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$.

a) Calculaţi suma în $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$: $s = \hat{1}\cdot\hat{2} + \hat{2}\cdot\hat{3} + \hat{3}\cdot\hat{4} + \hat{4}\cdot\hat{5} + \hat{5}\cdot\hat{6} + \hat{6}\cdot\hat{7} + \hat{7}\cdot\hat{8}$

b) Să se rezolve ecuaţia matriceală în inelul matricelor $M_2(\mathbb{Z}_9)$: $\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{5} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{1} \\ \hat{7} & \hat{8} \end{pmatrix}$

c) Arătaţi că matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_9)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{8}\}$

3. Se consideră numerele $I(a) = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + ax + 1} dx$ şi $J(a) = \int_0^1 \frac{1}{e^x + ax + 1} dx$, unde $a \in [0, +\infty)$ este parametru.

a) Calculaţi $I(0)$.

b) Calculaţi $J(0)$.

c) Determinaţi numărul real pozitiv a pentru care este adevărată relaţia: $I(a) + a \cdot J(a) = 2$

4. Rata cu care o familie utilizează, într-o zi, energia electrică (în kW / oră) este $K(t)$ dată de relaţia $K^{I}(t) = 5t \cdot e^{-t}$, unde $t \in [0; 24]$ este timpul exprimat în ore.

a) Câţi kW foloseşte familia în primele 4 ore ale zilei?

b) Câţi kW consumă familia în 30 de zile?

(În calcule se va lua $e \simeq 3$. Rezultatele se vor exprima sub formă zecimală cu două zecimale exacte.)

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*